بنام خدا

www.dr-haghbin.info/courses/
www.LMS.dr-haghbin.info
ahaghbin@gmail.com

کدینگ منبع (lossless)

در این بخش می خواهیم به عنوان مثال، دو کد منبع پرکاربرد را بررسی کنیم. مورد اول کد منبع Shannon-Fano است که یک کد پیشوندی است و مورد دوم کدینگ منبع هافمن است که یک کد منبع بهینه است.

- Shannon - Fano Source Coding

می‌دانیم که همواره داریم

$$L \geq H(X)$$

L: طول کلمات رمز

$H(X)$: آنتروپی منبع

از طرف دیگر

$$L = \sum_x l(x)\, p(x) \equiv E\{l(x)\} \qquad (1)$$

$$H(X) = \sum_x \log \frac{1}{p(x)}\, p(x) \equiv E\left\{\log \frac{1}{p(x)}\right\}$$

از مقایسه روابط ① و ② می‌توان به این نتیجه رسید که اگر برای خروجی x از منبع X، طول کلمه کد متناظر یعنی $l(x)$ را برابر $\log \frac{1}{P(x)}$ در نظر بگیریم به طور تساوی

$$L \geq H(X) \qquad (*)$$

خواهیم رسید. اما می‌دانیم که $l(x)$ همواره باید عدد صحیح باشد در صورتی که $\log \frac{1}{P(x)}$ لزوماً یک عدد صحیح نیست. بنابراین با توجه به رابطه $(*)$ می‌توانیم طول کلمه کد متناظر با x را به صورت زیر در نظر بگیریم.

$$l(x) = \left[\log \frac{1}{P(x)} \right]^{+}$$

* اگر بخواهیم کد منبع M-ary داشته باشیم، لازم است که با یک بیت از M برابر

$$M^* = \{0, 1, \dots, M-1\}$$

$$l(x) = \left\lceil \log_M \frac{1}{P(x)} \right\rceil^+$$

* اگر برای یک توزیع منبع $P(x)$ عبارت $\log_M \frac{1}{P(x)}$ به ازای هر $x \in X$ یک عدد صحیح باشد

توزیع منبع را یک توزیع M-adic می‌گوییم و در این صورت کد Shannon-Fano یک کد بهینه خواهد بود. در این صورت داریم

$$\forall x \in X \; ; \; \exists n \in \mathbb{N} \; ; \; \log_M \frac{1}{P(x)} = n \quad \text{یا} \quad P(x) = M^{-n}$$

$$\sum_x P(x) = 1$$

* در حالت کلی، کد تک Shannon-Fano بهینه است زیرا

$$l(x) = \left\lceil \log_M \frac{1}{P(x)} \right\rceil^+ \Rightarrow \log_M \frac{1}{P(x)} \le l(x) < \log_M \frac{1}{P(x)} + 1$$

طرفین نامساوی را در $P(x)$ ضرب می‌کنیم

$$P(x) \log_M \frac{1}{P(x)} \le P(x) l(x) < P(x) \log_M \frac{1}{P(x)} + P(x)$$

روی تمام مقادیر $x \in X$ جمع می‌بندیم

$$\underbrace{\sum_x P(x) \log_M \frac{1}{P(x)}}_{H_M(X)} \le \underbrace{\sum_x P(x) l(x)}_{L} < \underbrace{\sum_x P(x) \log_M \frac{1}{P(x)}}_{H_M(X)} + \underbrace{\sum_x P(x)}_{1}$$

Shannon-Fano کد در

$$H_m(X) \leq L < H_m(X) + 1$$

⇐ کد یک Shannon-Fano ما کنزعم: اندازه‌ی یک واحد از متن رمز شده $H_m(X)$ فاصله دارد یا بایان دهیم، این که ما کنزعم یک واحد سربار (overhead) ایجاد می‌کند.

⇐ برای کد Shannon-Fano داریم $l(n) = \left\lceil \log_m \frac{1}{P(n)} \right\rceil^+$ و می‌دانیم که کد منبع ما باید یک کد لحظه‌ای باشد. یعنی هیچ کلمه کدی، پیشوند کلمه کد دیگر نباشد. بنابراین با دانستن $l(n)$ به ازای خروجی‌های منبع و با کمک ساختار درختی، می‌توانیم کلمات کد را برای خروجی‌های منبع تعیین کنیم.

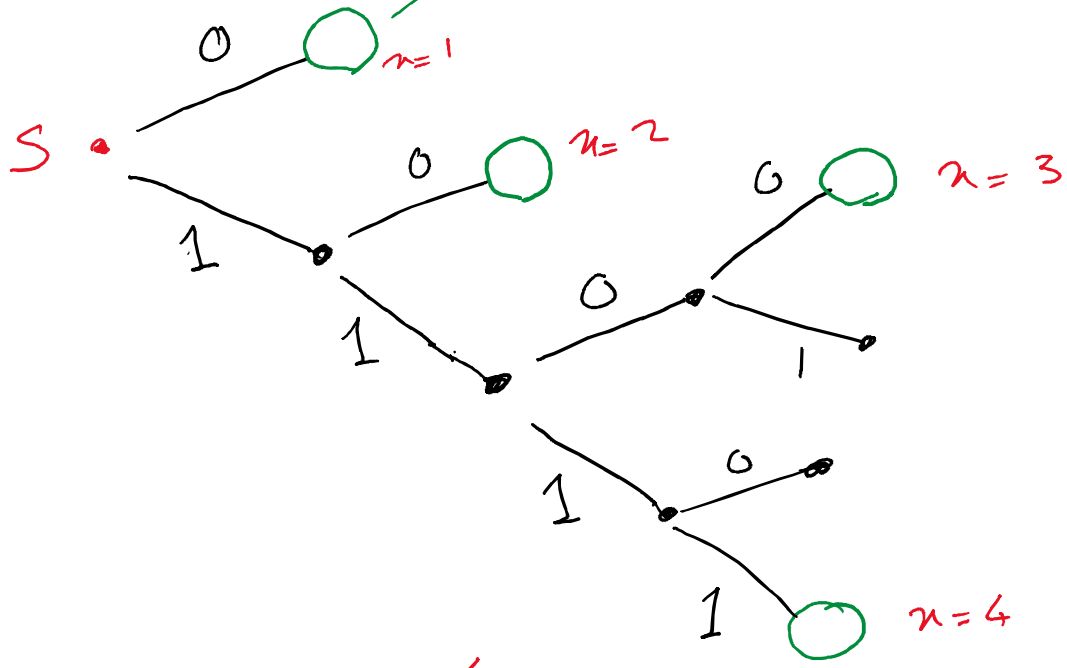
مثال 1- کدینگ برای منبع زیر به دست بیاورید. (باینری) Shannon-Fano

x	$p(x)$	$l(x) = \lceil \log_2 \frac{1}{p(x)} \rceil$	$c(x)$
1	$1/2$	1	0
2	$1/3$	2	10
3	$1/12$	4	1100
4	$1/12$	4	1111

$$L = E\{l(x)\} = \sum_x l(x)p(x) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{12} = \frac{11}{6}$$
$$= 1.833$$

این نشانه به عنوان کلمه ۲ انتخاب شده است

از گره های درجه ۰ ، شاخه ای خارج نمی شود که نشان می کند ، هیچ کلمه کدی پیشوند کلمه کد دیگر نخواهد بود .



با توجه به ساختار درخت کد ، می توان دید که این کد ، زیرینه است . کلمات کد 110 ، 111

انتخاب های مناسب تری برای $n=3$ ، $n=4$ هستند .

$$H(X) = E\left\{\log \frac{1}{P(x)}\right\} = \sum_{x} P(x) \log \frac{1}{P(x)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\log 2}_{1/2} + \frac{1}{3}\underbrace{\log 3}_{1.585} + \frac{1}{12}\underbrace{\log 12}_{3.585} + \frac{1}{12}\log 12 = 1.626$$

$$L = 1.833 \quad > \quad H(X) = 1.626$$

به میزان 0.207 واحد! مقدار بیشه اضافه دارد

کد منبع هافمن — Huffmann

کد هافمن یک کد بهینه است که بر اساس توزیع منبع یعنی $p(x)$ و با استفاده از یک ساختار درختی خاص، کد منبع را ایجاد می‌کند. الگوریتم کد هافمن را با یک مثال، برای منبع غیر باینری (کد باینری) خواهیم داد.

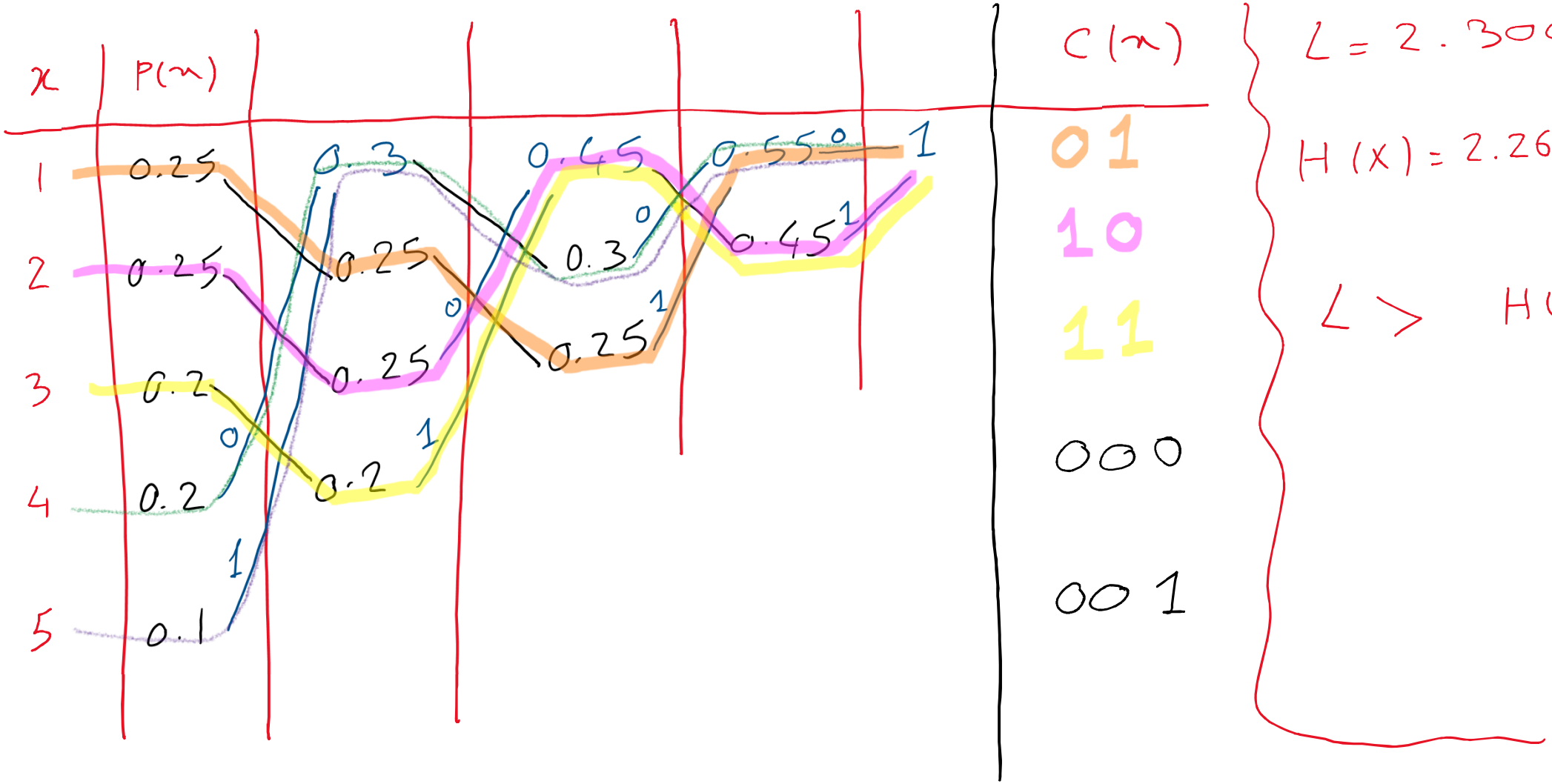
مثال 2- یک منبع به صورت زیر در نظر می‌گیریم. کد هافمن را برای این منبع به دست آورید.

x	$p(x)$
1	0.25
2	0.25
3	0.2
4	0.2
5	0.1

$$H(X) = E\left\{\log \frac{1}{P(X)}\right\} = \sum_x p(x) \log \frac{1}{p(x)}$$

$$= 0.25 \underbrace{\log 4}_{2} + 0.25 \log 4 + 0.2 \underbrace{\log 5}_{2.322} + 0.2 \log 5 + 0.1 \underbrace{\log 10}_{3.322}$$

$$= 2.263$$



$$L = E\{l(x)\} = \sum_x p(x)\,l(x) = 0.25\times2 + 0.25\times2 + 0.2\times2 + 0.2\times3 + 0.1\times3$$
$$= 2.3$$

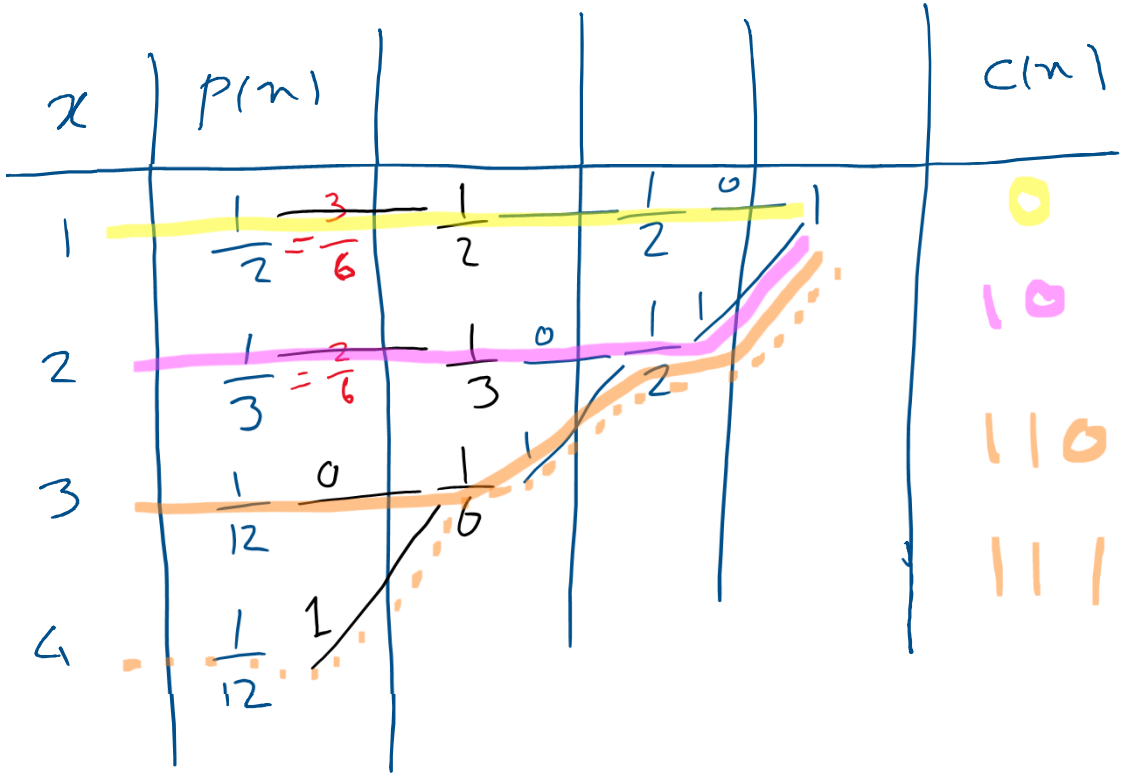
3 - مرحله 2 را آنقدر تکرار می‌کنیم تا در ستون آخر یک سمبل (با احتمال یک) بدهیم.

4 - برای به دست آوردن کلمه‌ی مربوط به هر سمبل خروجی از منبع، مسیر حرکت آن سمبل از گره‌ی انتهایی در ریشه (سمبل با احتمال یک) مشخص می‌کنیم و اعداد متناظر شده در این مسیر را به صورت MSB First به عنوان کلمه‌ی متناظر با آن سمبل در نظر می‌گیریم.

مثال 3 - برای منبع مثال 1. که هافمن را به آن بیاورید را که

مقایسه کنید

Shannon-Fano



$H(X) = 1.626$

$L = E\{l(x)\}$

$L = \sum_n p(n)\, l(n)$

$L = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{3}\times 2 + \frac{1}{12}\times 3 + \frac{1}{12}\times 3$

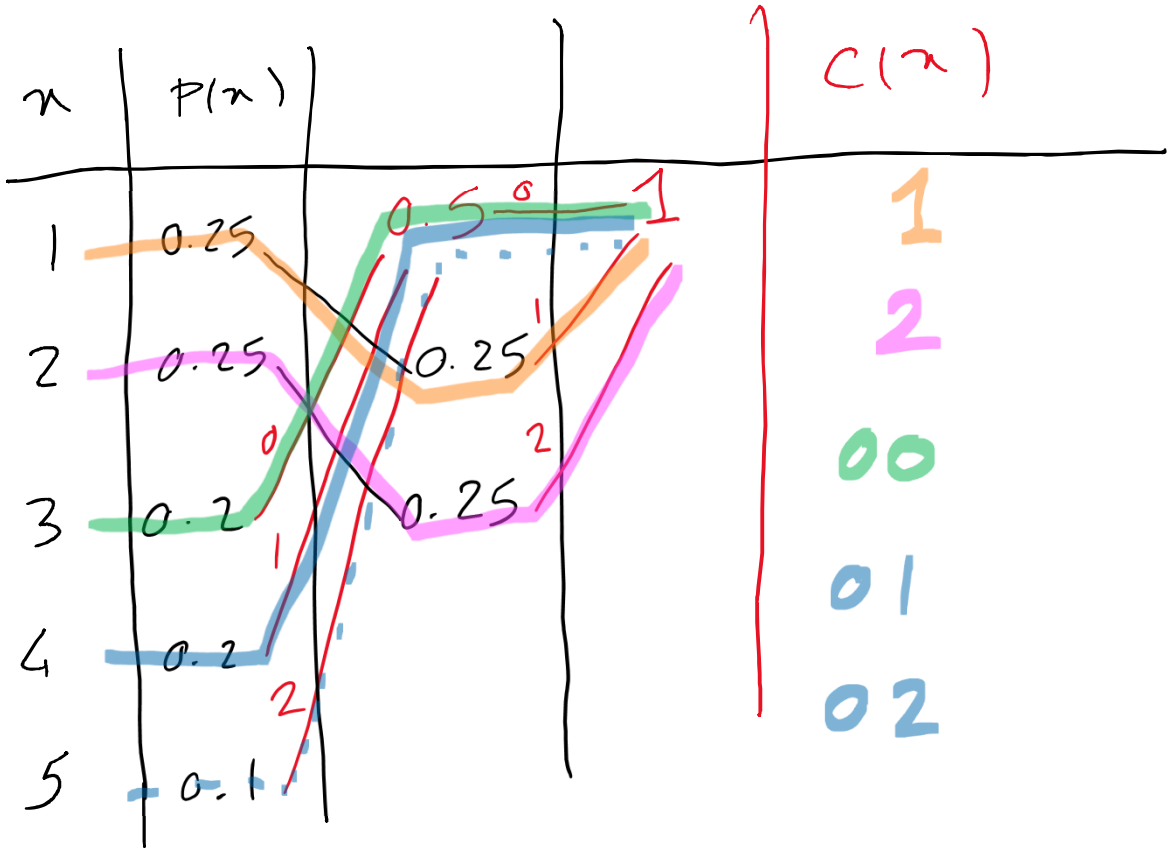
$L = 1.666 > H(X) = 1.626$

برای نمونه‌ی 0.04 راحه با مقدار بیشه اختلاف دارد

تمرین - برای منبع مثال 2، که الفبای آن باینری است، با کد حاصل از Shannon-Fano مقایسه کنید.

مثال 4 - برای منبع مثال 2، که الفبای آن باینری است، کد حاصل از ternary با $M = 3$

$$M^* = \{0, 1, 2\}$$



$H_3(X) = 1.426$ (ternary digit)

$$H_3(X) = E\left\{\log_3 \frac{1}{P(X)}\right\} = \sum_x P(x) \log_3 \frac{1}{P(x)} = \underbrace{0.25 \times 2 \log_3 4}_{1.262} + \underbrace{0.2 \times 2 \log_3 3}_{1.465} + \underbrace{0.1 \log_3 10}_{2.096}$$

$$L = E\{\ell(x)\} = \sum_x P(x)\,\ell(x) = 0.25 \times 1 \times 2 + 0.2 \times 2 \times 2 + 0.1 \times 2 = 1.5 \text{ (ternary digit)}$$